

Числовые и функциональные ряды



ТИПЫ РЯДОВ

Числовые ряды

1. Знакоположительные
числовые ряды
2. Знакопеременные
числовые ряды

Функциональные ряды

1. Функциональные ряды
2. Степенные ряды
3. Ряды Фурье



Числовые ряды

Пусть $u_1; u_2; u_3; \dots; u_n; \dots$ члены числовой последовательности

О п р е д е л е н и е. *Числовым рядом называется выражение*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Числа $u_1; u_2; u_3; \dots; u_n; \dots$ называются *членами* числового ряда,

а $u_n = f(n)$ - *общим членом* ряда. Для того, чтобы задать числовой ряд, достаточно задать выражение его общего члена как функцию его номера. Например

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{3n-1} + \dots$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{n!} = \frac{3}{1!} - \frac{4}{2!} + \frac{5}{3!} - \frac{6}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{n!} + \dots$$

О п р е д е л е н и е. Сумма первых n членов ряда называется n -ой частичной суммой ряда и обозначается S_n , т.е.

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n.$$

В частности: $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$

Частичные суммы ряда образуют числовую последовательность $\{S_n\}$.

О п р е д е л е н и е. Суммой S числового ряда называют предел последовательности его частичных сумм $\{S_n\}$ при неограниченном увеличении номера частичных сумм

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Числовой ряд называют *сходящимся*, если он имеет сумму (в этом случае существует конечный предел последовательности частичных сумм ряда) и *расходящимся*, если таковая не существует ($\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует).



Если числовой ряд сходится, то, естественно, он имеет сумму.

Необходимый признак сходимости

Если числовой ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

сходится, то предел его общего члена обязательно равен нулю, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Если необходимый признак сходимости не выполняется, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0,$$

то ряд расходится.

Сходимость ряда исследуется по следующей схеме:

1. Проверяется необходимый признак сходимости.
2. Если необходимый признак выполняется, то окончательный вывод о сходимости ряда решается с помощью достаточных признаков сходимости.



Необходимый признак следует понимать так:

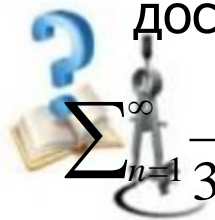
Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то ряд может сходиться, но может и расходиться.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, ряд точно расходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{1}{4} + \frac{3}{7} + \frac{5}{10} + \dots \text{расходится, т.к. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \dots \text{расходится, хотя } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n+1} = 0.$$

В дальнейшем, если предел общего члена ряда окажется равным нулю, то будем говорить, что ряд может сходиться, и продолжать исследование на сходимость с помощью достаточных признаков



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{3n^3 + 2n - 1} = \frac{5}{4} + \frac{10}{27} + \frac{15}{86} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{3n^3 + 2n - 1} = 0$$

ряд может сходиться

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Числовой ряд является знакоположительным, если все его члены положительны

Признак сравнения 1

Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots, \quad (2)$$

причем, начиная с некоторого номера $n = N$, выполняется условие

$$u_n \leq v_n$$

Тогда из сходимости ряда (2) всегда следует сходимость и ряда (1),
из расходимости ряда (1) следует и расходимость ряда (2).



Признак сравнения 2 (предельный)

Если существует конечный, отличный от нуля предел отношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0,$$

то оба ряда (1) и (2) одновременно либо сходятся, либо расходятся.

При применении признака сравнения данный ряд сопоставляется с одним из, так называемых, эталонных рядов, сходимость или расходимость которых установлена.



Эталонные ряды

1. Геометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n :$$

Если $|q| < 1$ — ряд сходится
Если $|q| \geq 1$ — ряд расходится

2. Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} :$$

Если $k > 1$, то ряд сходится
Если $k \leq 1$, то ряд расходится

3. Гармонический ряд



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots - \text{ ряд расходится}$$

Например, сходящимися рядами будут являться следующие ряды

$$k > 1:$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 + 2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^7}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/2}},$$


$$|q| < 1:$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n,$$

Например, расходящимися рядами будут являться следующие ряды

$$k < 1:$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{2n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{2} \cdot n^{3/5}},$$


$$|q| \geq 1:$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n,$$

Признак сравнения применяется для решения вопроса о сходимости, к примеру, рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 5}{\sqrt[3]{n^7 + 4n^5 + 2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2 + 3} \right), \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt[5]{n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2n} \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^4}.$$

При использовании этого признака нужно привести данный ряд к эквивалентному ряду вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n^k} \quad \sum_{n=1}^{\infty} A q^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n^k} \quad \sum_{n=1}^{\infty} A q^n$$

При этом очень часто используется прием выделения главных членов выражения, а также таблица эквивалентных бесконечно малых величин

*Таблица эквивалентных
бесконечно малых величин*

$$\alpha(x) \rightarrow 0$$

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x),$$


$$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2},$$

$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x),$$


$$\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}.$$

$$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x),$$

• 1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ -- ряд расходится, так как $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$

а гармонический ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

• 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 \sqrt{n}}$ -- ряд сходится, так как

$$\frac{\sin^2 n}{n^2 \sqrt{n}} < \frac{1}{n^{5/2}},$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$

сходится как обобщенный гармонический с показателем $k = 5/2 > 1$.



- 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2n}{1+n^2}$ -- ряд расходится, так как члены его для достаточно больших n эквивалентны членам гармонического ряда $\frac{1+2n}{1+n^2} \sim \frac{2n}{n^2} \sim \frac{2}{n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ расходится.

- 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n(1+n)(n+2)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ -- ряд сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $k = 2 > 1$

- 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+4n}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ -- ряд расходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $k = 2/3 < 1$



$$\bullet 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+4} \sin \frac{1}{2\sqrt{n}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} \frac{1}{2\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n^{3/2}} -$$

ряд сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $k = 3/2 > 1$


Здесь использовано то, что $\sin \frac{1}{2\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ при $n \rightarrow \infty$

$$\bullet 7. \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n^4} \sim \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} -$$

ряд сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем

$$k = 3 > 1$$

Здесь использована эквивалентность



$$\operatorname{arctg} \frac{1}{n^4} \sim \frac{1}{n^4} \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

• 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+4} \cos \frac{1}{2\sqrt{n}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ — ряд расходится

В данном случае использовано то обстоятельство, что

$$\cos \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

• 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n^2}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^4}$ — ряд сходится

как обобщенный гармонический ряд с показателем $k = 4 > 1$

Здесь мы воспользовались тем, что при $n \rightarrow \infty$



$$1 - \cos \frac{1}{n^2} \sim \frac{(1/n^2)^2}{2} = \frac{1}{2n^4}.$$

• 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ – ряд расходится

как обобщенный гармонический с показателем $k = 1/2 < 1$.

Здесь использовано $\ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{2}{\sqrt{n}}$ при $n \rightarrow \infty$

• 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ –

ряд сходится как геометрический со знаменателем $q = 1/2 < 1$

• 12. $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{3n} \cdot e^{-2n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n}}{e^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5^3}{e^2}\right)^n$ –

ряд расходится как геометрический со знаменателем $q = \frac{125}{e^2} > 1$.



Признак Даламбера

Если в числовом знакоположительном ряде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

существует предел отношения последующего члена ряда u_{n+1} к предыдущему u_n при $n \rightarrow \infty$ равный числу P

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p, \text{ то } \left\{ \begin{array}{l} \text{при } p < 1 - \text{ ряд сходится} \\ \text{при } p > 1 - \text{ ряд расходится} \\ \text{при } p = 1 - \text{ вопрос о сходимости} \\ \text{не решен} \end{array} \right.$$



Признак Даламбера применяется для решения вопроса о сходимости таких рядов, общие члены которых содержат степенные, показательные выражения и факториалы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3 n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)^2}{7^{2n-1}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}.$$



При применении признака Даламбера может встретиться необходимость использования второго замечательного предела.


$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}.$$

Применяя признак Даламбера, необходимо:

1) записать $(n + 1)$ – ый член ряда \mathbf{u}_{n+1} ,

2) найти предел отношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p,$$

 3) сравнить полученное значение p

 с единицей и сделать вывод о сходимости ряда.

$$\bullet 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(2n+1)^2}.$$

$$u_n = \frac{5^n}{(2n+1)^2}, \quad u_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(2(n+1)+1)^2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}}{(2n+3)^2} \cdot \frac{(2n+1)^2}{5^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(2n+1)^2}{(2n+3)^2} = 5 > 1 \quad \text{-- ряд расходится}$$



Здесь учтено, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2}{(2n+3)^2} = 1.$$

$$\bullet 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{n^3 \cdot 7^n}}.$$

$$u_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n^3 \cdot 7^n}}, \quad u_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{\sqrt{(n+1)^3 \cdot 7^{n+1}}} = \frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^3 \cdot 7^{n+1}}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)}{\sqrt{(n+1)^3 \cdot 7^{n+1}}} \cdot \frac{\sqrt{n^3 \cdot 7^n}}{(2n-1)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)}{(2n-1)} \cdot \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{(n+1)^3}} \cdot \frac{\sqrt{7^n}}{\sqrt{7^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{7}} < 1$$

-- ряд СХОДИТСЯ.



Здесь учтено, что при

$$n \rightarrow \infty \quad \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{(n+1)^3}} \rightarrow 1, \quad \frac{2n+1}{2n-1} \rightarrow 1.$$

• 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

$$u_n = \frac{n^n}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n (n+1) n!}{n! (n+1) n^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \approx 2,718... > 1$$

-- ряд расходится



• 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n!(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^n (n+1) \cdot n!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{2}{e} < 1.$$



-- ряд сходится

$$\bullet 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n+2}}{n!}.$$

$$u_n = \frac{\sqrt{3n+2}}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{\sqrt{3(n+1)+2}}{(n+1)!} = \frac{\sqrt{3n+5}}{(n+1)!},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n+5}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\sqrt{3n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n+5} n!}{n!(n+1)\sqrt{3n+2}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n+5}}{\sqrt{3n+2}} \cdot \frac{1}{(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \quad \text{-- ряд сходится}$$



Здесь учтено, что при

$$n \rightarrow \infty \quad \frac{\sqrt{3n+5}}{\sqrt{3n+2}} \rightarrow 1, \quad \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

Радикальный признак Коши

Если в числовом знакоположительном ряде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

существует предел корня n — ой степени из общего члена ряда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = q, \text{ то } \begin{cases} \text{при } p < 1 - \text{ ряд сходится} \\ \text{при } p > 1 - \text{ ряд расходится} \\ \text{при } p = 1 - \text{ вопрос о сходимости} \\ \text{не решен} \end{cases}$$

Радикальный признак Коши применяется для решения вопроса о сходимости рядов типа

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+5} \right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^{n/2} \frac{1}{2n+9}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{3n} n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2},$$

- 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{5n+4} \right)^n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+2}{5n+4} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{5n+4} = \frac{3}{5} < 1$$

-- ряд сходится

- 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{8n+1} \right)^{n^2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{8n+1} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{8n+1} \right)^n =$$

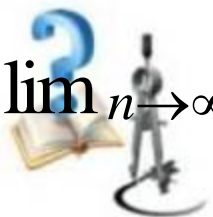
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{8} \right)^n = 0 < 1 \quad \text{-- ряд сходится}$$

• 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n^2 + 5n - 1}{4n^2 + 2} \right)^{3n+2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{7n^2 + 5n - 1}{4n^2 + 2} \right)^{3n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2 + 5n - 1}{4n^2 + 2} \right)^{3+2/n} = \left(\frac{7}{4} \right)^3 > 1$$

ряд расходится.

• 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^{2n} \frac{1}{\sqrt{6n+5}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{6n+5}} \right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6n+5} \right)^n$.



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{6n+5} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6n+5} = 0 < 1$$

ряд сходится.

• 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{5^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n =$$

$$= \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{5} < 1 \quad \text{-- ряд сходится.}$$



• 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n^2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2} \cdot 6} = e^6 > 1$$

ряд расходится.



Интегральный признак Коши

Если $f(x)$ при $x \geq 1$ непрерывная, положительная и монотонно убывающая

непрерывная, положительная и монотонно убывающая

функция такая, что при натуральных значениях аргумента значения функции совпадают со значениями членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \text{ т.е. } u_1 = f(1), u_2 = f(2), \dots, u_n = f(n),$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, сходится, если сходится несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x) dx, \quad \text{и расходится, если этот интеграл расходится.}$$

Чтобы составить подынтегральную функцию достаточно заменить в выражении общего члена ряда n на x



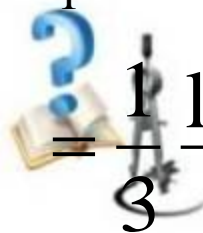
Несобственный интеграл сходится, если он равен конечному числу и расходится, если равен бесконечности или не существует.

Интегральный признак Коши применяется для решения вопроса о сходимости рядов типа

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^k n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{n^2}.$$

• 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(3n+2)}{3n+2}$.

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln^2(3x+2) dx}{3x+2} = \frac{1}{3} \int_1^{\infty} \ln^2(3x+2) d(\ln(3x+2)) =$$


$$= \frac{1}{3} \frac{\ln^3(3x+2)}{3} \Big|_1^{\infty} = \infty$$

интеграл и вместе с ним исходный ряд расходятся.

$$\bullet 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln^5(n+2)}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+2) \ln^5(x+2)} &= \int_1^{\infty} \frac{d(\ln(x+2))}{\ln^5(x+2)} = -\frac{1}{4 \ln^4(x+2)} \Big|_1^{\infty} = \\ &= -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{4 \ln^4 3} = \text{const} \end{aligned}$$

-- ряд сходится, так как сходится несобственный интеграл



- 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\sqrt{\ln^3(2n+1)}}$.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{\ln^3(2x+1)}} = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{d(\ln(2x+1))}{\sqrt{\ln^3(2x+1)}} = \frac{1}{2} \frac{-2}{\sqrt{\ln(2x+1)}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\ln(2x+1)}} \Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\sqrt{\ln 3}} = 0 + \frac{1}{\sqrt{\ln 3}} = \text{const}$$

-- ряд сходится, так как сходится несобственный интеграл



• 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = -2 \int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x}} d(-\sqrt{x}) = -\frac{2}{e^{\sqrt{x}}} \Big|_1^{\infty} = -\frac{2}{\infty} + \frac{2}{e} = \frac{2}{e}$$

-- ряд сходится, так как сходится несобственный интеграл



Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Условная и абсолютная сходимости

Знакочередующимся называется числовой ряд, в котором знаки членов ряда чередуются

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot u_n + \dots$$

Достаточным признаком сходимости таких рядов является

Признак Лейбница

Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot u_n$ сходится, если абсолютная величина его членов $|(-1)^{n+1} \cdot u_n| = u_n$

монотонно убывает, а предел общего члена равен нулю, т.е.



$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots \geq u_n \geq \dots, \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Абсолютная и условная сходимости

О п р е д е л е н и е. *Знакопеременный ряд называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных значений членов данного ряда.*

Если же данный ряд по признаку Лейбница сходится, но ряд из абсолютных величин его членов расходится, то исходный ряд называют **у с л о в н о** сходящимся.

Схема исследования на сходимость знакопеременных рядов

1. Проверяем выполнение признака Лейбница, находим $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.
Если предел общего члена ряда не равен нулю, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$,
то утверждаем, что ряд расходится.
Если же признак Лейбница выполняется, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$,
то исследуем ряд на абсолютную сходимость.




2. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного знакочередующегося ряда и исследуем сходимость полученного знакоположительного ряда с помощью одного из достаточных признаков сходимости, рассмотренных выше.


Делаем вывод:

а) если ряд из абсолютных величин сходится, то исходный знакочередующийся ряд сходится абсолютно,

б) если ряд из абсолютных величин расходится, то исходный знакочередующийся ряд сходится условно.

• 1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n+5}{3n+1}.$$


$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^n \frac{4n+5}{3n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+5}{3n+1} = 4/3 \neq 0$$

 -- ряд расходится, так как не выполняется признак Лейбница.

- 2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{n^2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^n \cos \frac{\pi}{2n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{2n} = \cos 0 = 1 \neq 0 -$$

-- ряд расходится, так как не выполняется признак Лейбница.

- 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3 \cdot 5^n}{\sqrt{2n+1}}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} n^3 \cdot 5^n}{\sqrt{2n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \cdot 5^n}{\sqrt{2n+1}} = \infty \neq 0$$



-- ряд расходится, так как не выполняется признак Лейбница.

- 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n^3 + 2n + 5}}$.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n^3 + 2n + 5}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3 + 2n + 5}} = 0$$

-- ряд сходится по признаку Лейбница.

2. Проверим сходимость соответствующего знакоположительного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3 + 2n + 5}} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}}$$

-- ряд расходится.

Вывод: исходный ряд сходится условно.



$$\bullet 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^5}{6^n \sqrt{3n+7}}.$$

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} n^5}{6^n \sqrt{3n+7}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{6^n \sqrt{3n+7}} = 0$$

-- ряд сходится по признаку Лейбница.

2. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда и исследуем его сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{6^n \sqrt{3n+7}}.$$

Используем признак Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5}{6^{n+1} \sqrt{3n+10}} \cdot \frac{6^n \sqrt{3n+7}}{n^5} = 1/6 < 1$$

ряд сходится.



Вывод: исходный ряд сходится абсолютно.

- 6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}$.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \ln^2 n} = 0,$$

ряд сходится по признаку Лейбница

2. Сходимость соответствующего знакоположительного ряда проверяем с помощью интегрального признака

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \int_2^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{\infty} = -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} = \text{const}$$

-- интеграл и ряд сходятся.

Вывод: исходный ряд сходится абсолютно.

- 7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Этот ряд расходится, так как предел общего члена ряда по абсолютной величине равен 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n| = 1 \neq 0.$$

